



※ 본 아티클은 CMP MEDIA LLC와의 라이선스 계약에 의해 국문으로 제공됩니다

## 후원 특징: 비디오 게임을 위한 유체 시뮬레이션 (2 편) (Sponsored Feature: Fluid Simulation for Video Games (Part 2))

마이클 골레이 (Michael Gourlay)  
가마수트라 등록일(2009. 10. 28)

[http://www.gamasutra.com/view/feature/4176/sponsored\\_feature\\_fluid\\_.php](http://www.gamasutra.com/view/feature/4176/sponsored_feature_fluid_.php)

*[인텔의 비주얼 인터넷 사이트의 일부와 중부 플로리다 대학교 인터랙티브 엔터테인먼트 학교의 마이클 J. 골레이 박사가 쓴 본 후원 특징은 유체 역학과 그 시뮬레이션 기술을 설명하고 있는 여러 개의 연속 부분을 계속한다. 처음 설치를 하려면, [여기를](#) [여기를](#) 클릭하라.]*

### 유체 시뮬레이션 기술

지난 기사에서 설명한 것처럼, 초기와 경계 값 구속과 결합한 비직선 편미분 방정식 (PDE's)에서 유체의 운동을 설명하고 있다. 그러한 방정식을 푸는 것은 어렵다; 탄도나 조화 진동과 같이 더욱 단순하지 않은 것처럼, 유체 운동은 “폐쇄 형태” 분석 해결책을 가지고 있지 않다. 이 기사에는 유체 운동에 대한 대략적인 해결책을 계산하기 위하여 사용하는 수치 기법에 대하여 설명하고 있다.

실제와 시뮬레이션 사이의 차이는 최소 두 가지의 특징, 즉 근사치와 이산화를 포함하고 있다. 우리가 적어 놓은 방정식은 단지 실제의 근사치일 뿐이다. 예를 들면, “점성”의 개념은 분자들 사이의 실제 상호작용을 지나치게 단순화하였다. 또한, 유체들은 한 공간의 구역에서 무한한 점들에서 존재하고 있음을 의미하는 연속적인 매체이다. 컴퓨터 시뮬레이션은 하나의 연속체의 유체들의 수학적 모델을 유한한 수의 이산값으로 전환한다. 그러한 값들은 그물코에 존재하거나 입자로서 자유롭게 움직일 수 있다.

이전의 기사에서 유체 운동을 계산하려면 그것을 기억하라, 여러분은 모멘텀이나 소용돌이도를 풀 수 있다. 여러분은 그들이 푸는 방정식에 따라 그리고 그들의 이산화 계획에 따라 유체 시뮬레이션 기술을 분류할 수 있다. 이 기사는 이러한 기술 뒤의 관념들을 나타내고 있다:

**메쉬+모멘텀.** 조스 스타(Jos Stam)의 “안정한 유체”와 믹 웨스트(Mick West)의 “실용 유체 역학”의 예가 있다.

**입자+모멘텀.** 예로는 입자완화 유체 동역학 (SPH)이 있다.

**메쉬+소용돌이도.** 전산유체역학 (CFD) 연구원들은 이 기술을 사용하지만, 최근 그들은 컴퓨터 그래픽에서 인기가 낮아졌다.

**입자+소용돌이도.** 이들은 보르톤 시뮬레이션이라 부른다.

유체 시뮬레이션은 연속체를 나타내기 위하여 아주 많은 점들을 이용할 필요성 때문에 (부분적으로) 천천히 움직인다. 여러분은 근사치를 이용하여 시뮬레이션의 속도를 높일 수 있다 (즉, 속도를 위한 거래 현실주의). 여러분은 또한 계산을 비교하여 점차 유행하고 있는 멀티코어 하드웨어를 사용할 수 있다. 이 기사에서는 유체 운동을 시뮬레이션 하기 위하여 가끔 사용하는 약간의 수치 기법들을 검토하고 여러분이 멀티코어 하드웨어를 이용하여 많은 코드를 비교할 수 있는 몇 가지 방법에 관하여 말하고 있다.

## 이산화

유체 역학 방정식을 수치로 풀려면, 여러분은 원래의 연속 문제 (무한한 자유도를 가지고 있는)를 이산 문제 (유한한 자유도를 가지고 있는)로 전환해야 한다. 이산화 계획의 선택은 보간법, 대략적 공간 구배법, 시간 전개와 경계 조건 만족 등의 시뮬레이션의 다른 면에 영향을 미치고 있다. 그 이산화는 여기에서 다루기에는 너무 많은 여러 가지 형태를 가지고 있으므로, 이 기사는 직관적인 공식화에 초점을 맞추고 있다: 공간과 그 이산화를 사용한 대략적 공간 구배법의 이산화와 그러한 근사치로 공간 구배법을 대치하여 연속 방정식 다시 쓰기.

이 전의 기사에서는 유체 모멘텀과 소용돌이도 방정식의 오일러 (고정 좌표)와 라그랑주 (이동 좌표) 관점을 나타내었다. 비슷하게, 여러분은 그리드, 입자 혹은 두 가지의 하이브리드를 이용하여 공간을 이산화 시킬 수 있다. 그들이 그리드 기반이나 메시 프리 이산화의 사용여부에 관계없이, 우리는 그 이름에 시뮬레이션에서 명백하게 값을 나타낼 수 있는 지역에 대하여 결절점을 주고 있다.

## 그리드 기반 이산화

그리드 기반 이산화는 유체를 시뮬레이션이 특정 지역에서 추적하고 있는 특성을 가지고 있는 필드로 다루고 있는, 즉, 오일러의 관점에 유용하다. 필드를 나타내기 위하여 특정 그리드를 결정하는 것을 메싱이라 부른다.

그림 1a 에서 묘사하고 있는 것처럼, 가장 간단한 것은 단일 고정 그리드로, 좌표 시스템의 축을 따라 똑 같은 간격으로 공간을 셀로 나눈 것이다. 여러분이 가상 세계에 있는 그 지역을 근거리 그리드 셀의 메모리 주소를 직접 계산할 수 있기 때문에, 이는 빠른 검색을 할 수 있다. 하지만, 단일 그리드는 낭비가 될 수 있으므로, 일반적인 흐름에서, 일부 지역에서는 매우 높은 해상도를 필요로 하지만 대부분은 낮은 해상도를 사용해도 된다. 단일 그리드를 가지고, 모든 지역이 똑 같은 해상도를 가지고 있으므로, 일반적으로 모든 지역에서 일부 지역을 과대 해상하고 다른 지역은 과소 해상한다.

그림 1b 에서 보여주고 있는 것처럼, 시뮬레이션은 또한 필요한 곳에서, 예를 들면, 소용돌이가 만들어지고 경계선에서 가까운 곳에서만 높은 공간 해상도를 보여주는 적응할 수 있는 그리드를 사용할 수 있다. 특히 물체가 유체 속에서 움직이는 때처럼, 경계선이 움직일 때, 그러한 그리드를 만드는 것은 복잡하다. 또한, 공간 기반 검색은 더욱 복잡한 공간 분할 자료 구조의 트래버스(횡단)을 수반하기 때문에, 단일 그리드보다 적응할 수 있는 그리드에서 더욱 느리다.

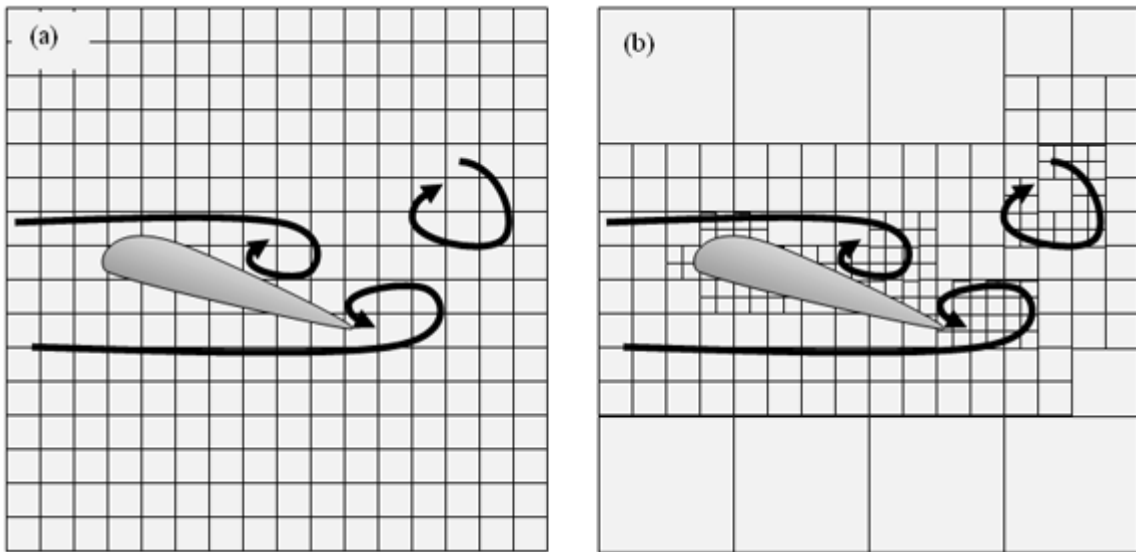


그림 1: (a) 단일 고정 그리드, (b) 적응할 수 있는 그리드

어떠한 지배 방정식이 유체 운동을 설명하고 있는 이전의 기사를 떠올려라. 각 방정식에서는 속도와 밀도와 같은 유체 특성의 시간 진화를 설명하고 있다. 그리드 기반 유체 시뮬레이션을 위한 방법은 보통 각 그리드 점에서 그러한 지배 방정식 항들의 계산과 그러한 특성들의 각각을 업데이트 등을 수반한다. 대부분의 노력은 그러한 항들을 계산하고 확고하게 업데이트를 실행하는 데 있으며, 이 기사에서는 나중에 이들을 깊이 파고 든다. 하지만, 원칙상 (만약 실체가 아니더라도), 그 방법은 아주 간단하다.

만약 여러분이 그리드 점 사이의 유체 특성의 값을 알기를 원한다면, 여러분은 써 넣어야 한다. 여러분은 그러한 보간법을 이행하기 위하여 다양한 기술들을 사용할 수 있으며, 이것은 공간 구배법과 관련이 있는데 이 기사에서는 아래에서 더욱 자세히 다루고 있다.

그리드 기반 이산화를 사용하는 시뮬레이션은 원하지 않는 수치 확산으로 고생할 수 있다. 여러분은 이미지 창출과 처리에 대한 유추를 이용하여 이 현상을 이해할 수 있다. 만약 여러분이 픽셀의 그리드를 통하여 대각선을 긋는다면, 여러분은 그 선이 들쭉날쭉하거나 희미한 사이에서 선택해야 한다: 개별 그리드를 이용하고 있는 선을 따라 모든 위치에서 정확하게 선을 표시할 수 있는 방법은 없다. 이 문제는 여러분이 선을 옮기는 매 시간을 악화시키며, 그림 2 에 나타나 있는 것처럼, 각 업데이트 이후에, 더욱 흐려지고 소음이 심해 진다. 컴퓨터 그래픽 애플리케이션은 (점들의 쌍과 같이) 선들의 이상적인 표시 위에 저장하고 운영하여 이러한 흐림의 증가를 방지한다. 전산유체역학은 약간 유사한 기술을 가지고 있는데, 이산화 유체 입자 상에서 저장하고 운영하는 것이다.

원래

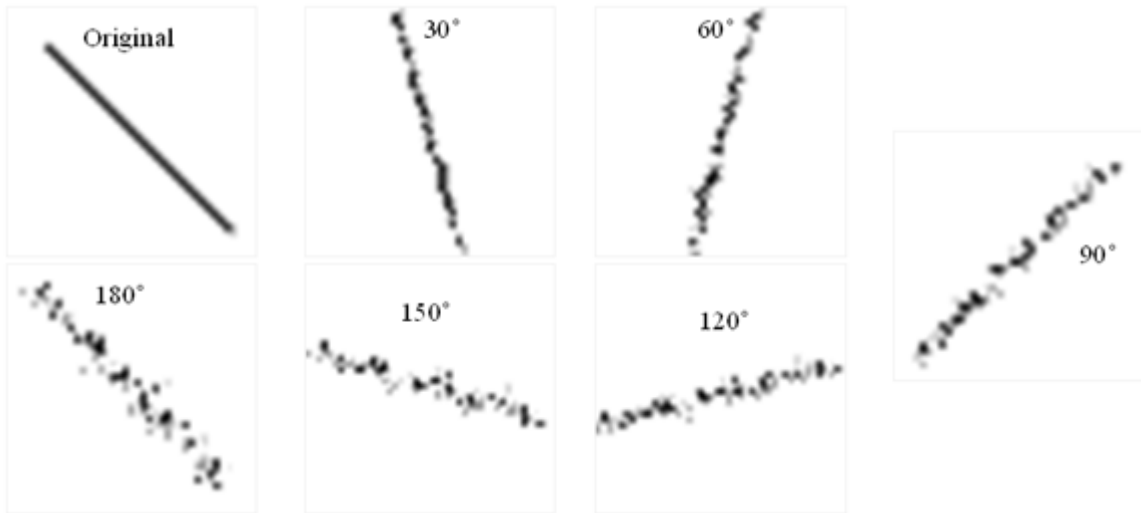


그림 2: 수치 확산. 원래의 선은 증가하며 180 도 회전하였다.

### 메쉬 프리 이산화

그리드 기반 이산화와 대비적으로, 메쉬 프리 이산화는 입자들이 흐름을 가지고 움직일 때 입자들의 행동을 추적하는 라그랑주 관점에 유용하다. 이러한 입자들은 위치, 밀도, 속도와 소용돌이도와 같은 유체 특성을 나타낼 수 있다. 그러한 특성들은 (만약 여러분이 그들에게 명령을 내리지 않는다면) 확산되지 않는다. 더욱이, 이 시뮬레이션은 흐름이 더욱 높은 해상도를 필요로 하는 곳에 있는 더 많은 입자들을 위치할 수 있으므로, 이 시뮬레이션은 (원칙적으로) 더욱 효율적일 것이다.

유체 입자 시뮬레이션은 두 가지 주요 종류로 나누는데, SPH 와 이산 와류법 (DVM)이 있다. SPH 시뮬레이션은 흐름 필드를 나타내기 위하여 “흐름 입자”를 사용한다. 이러한 유체 입자들을 유체 물질 입자로 생각하도록 하고 있으나, 아마도 이들을 이들과 함께 유체 특성 정보를 이동하며 옮기는 이동성 구름으로 생각하는 게 더 나은 것 같다. 이러한 구분은 미세하지만 중요하다. 메쉬 프리 시뮬레이션에서, 주어진 지역에서 유체 특성의 값을 찾으려면 입자들 사이에서 삼관하는 값이 필요하다. 각 입자는 부드럽고 지역적인 필드에서 “권원”을 나타낸다. 그림 3a 에서는 작은 지역을 가로지르는 입자의 영향을 “퍼뜨리는” 부드러운 기능의 예를 보여주고 있다. 필드는 밀도나 온도, 속도와 같은 하나의 유체 특성이 될 수 있다. 주어진 지역에서 필드의 값을 찾기 위하여, 여러분은 그 지역의 근처에 있는 모든 입자들로 인하여 그 필드에 대하여 기여도를 포함해야 한다. 보통, 여러 개의 입자들이 각 지역에서 필드에 기여하고 있다. 따라서, 여러분은 그림 3b 에 나타나 있는 것처럼, 입자들 사이에서 삼입할 필요가 있다.

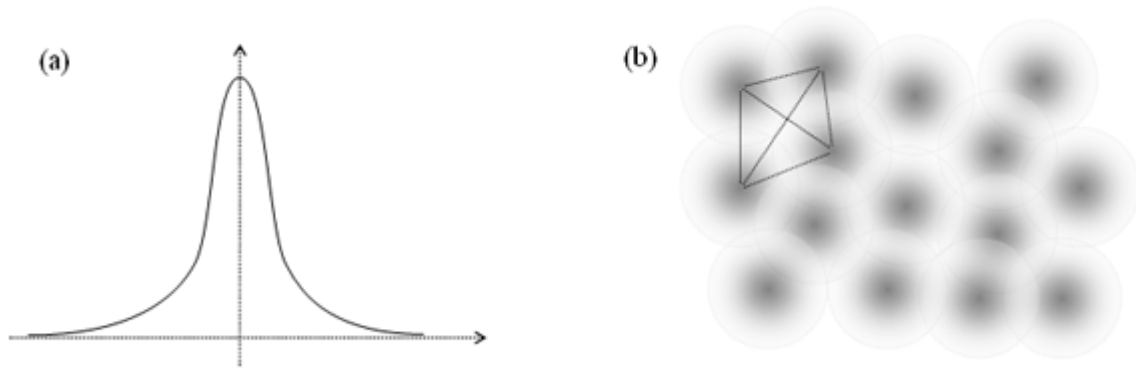


그림 3: 부드러운 입자 이산화. 부드러운 기능. (b) 필드를 나타내는 몇 가지 부드러운 입자. 선들은 그 영역에 있는 필드를 삼입하기 위하여 사용되는 입자들을 연결하고 있다.

DVM 시뮬레이션은 소용돌이 구역을 나타내는 자그마한 소용돌이 요소를 나타내기 위하여 보르톤이라 부르는 소용돌이 입자들을 사용하고 있다. 각각의 이 입자들은 그림 4 에 나와 있는 것처럼, 보르톤 주위를 돌고 있는 속도장을 포함하고 있다. 속도장을 유도하는 이것은 먼 거리까지 밖으로 뻗어 있다. 따라서, 각 보르톤은 유체에 있는 모든 다른 보르톤의 움직임에 영향을 미친다.

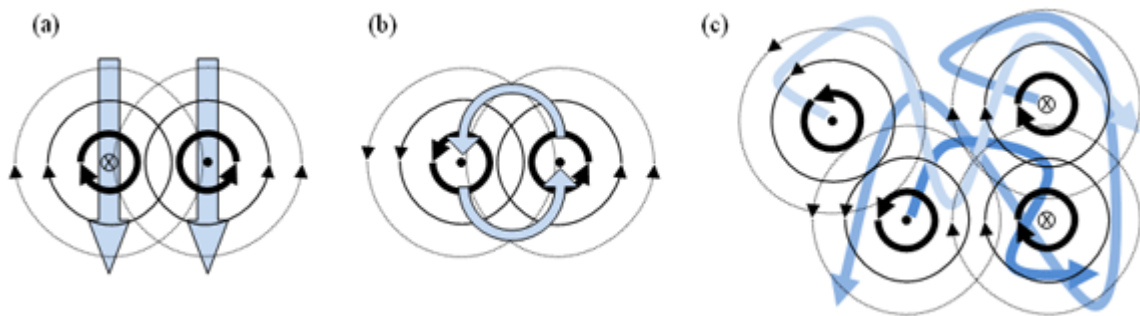


그림 4: 소용돌이 입자 (보르톤)와 이들이 유도하는 속도장. 역회전하는 소용돌이가 쌍이 선을 따라서 서로 밀고 있다. (b) 동회전 소용돌이가 쌍이 서로서로 궤도를 그리며 돌고 있다. (c) 4 개 이상의 소용돌이가 서로서로 혼란스럽게 움직이고 있다.

메쉬 프리 유체 시뮬레이션을 전개하는 방법은 그리드 기반 시뮬레이션과 똑 같은 구조를 가지고 있으며, 여분의 단계인 이류가 있다. 본 시리즈의 첫 번째 기사에서는 이류를 설명하였다; 각 입자는 그 특성을 업데이트하는 것 이외에 (흐름을 따라) 움직일 필요가 있다. “업데이트” 단계는 그리드 기반 시뮬레이션과 똑 같은 단계를 모방하고 있으나 이류 단계는 실제로 다르다.

여러분은 그리드 기반 시뮬레이션이 이러한 이류의 필요성이 왜 부족한지 궁금해 할 수 있다. 유체 방정식이 두 관점(오일러 및 라그랑주)에서 모두 똑같다면, 이류의 효과는 양 쪽 모두에 존재해야 한다. 그러면, 왜 그리드 기반 시뮬레이션에서는 아무런 이류 단계가 없는가? 답은 그리드 기반 시뮬레이션이 여전히 이류 항을 포함하고 있으나 그 영향은 정지한 그리드 점의 특성에 영향을 미친다는 것이다. 그리드 기반 시뮬레이션에서, 각 그리드 점은 정지한 온도계가 물이 그것을 뒤따라 흘러가면서 온도 변화를 감지하는 것과 거의 똑 같은 방식으로 이류의 효과를 감지하고 있다. 반대로, 메쉬 프리 입자 시뮬레이션에서, 여러분은 유체와 함께 움직이는 것이 자유로운 부표들에 달라붙어 있는 온도계와 같은 것을 상상할 것이다. 이류는 양 경우에

모두 존재하지만, (첫 번째 기사에서 언급한 것처럼) 이류항의 처리는 여러분이 유체 방정식의 우측이나 좌측에 그것을 놓아 두는지에 대하여 요약된다: 우측은 오일러 (그리드 기반)이며, 좌측은 라그랑주 (입자 기반)이다.

소용돌이 시뮬레이션에서 이류를 계산하는 것은 소용돌이도 방정식이 직접 속도를 제공하는 것이 아니라 이류항을 통하여 직접 속도를 필요로 하기 때문에, 특수 처리를 필요로 한다. (반대로, 모멘텀 방정식은 속도를 제공하며 동시에 그것을 필요로 한다.) 따라서 소용돌이 기반 시뮬레이션에서 이류를 계산하는 것은 소용돌이도에서 속도를 얻는 것을 필요로 한다. 비오사바르 법칙은 속도  $\mathbf{v}$  를 가진 점과 차환  $\mathbf{r}$  에서 속도 요소의 소용돌이도  $\boldsymbol{\omega}$  의 관계를 나타낸다:

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

DVM 시뮬레이션은 다른 모든 보르톤의 영향 때문에, 각 보르톤을 이루시키기 위하여 이 법칙을 사용한다.

입자처럼 소용돌이들을 나타내는 대신, 여러분은 그들을 필라멘트로 나타낼 수 있다. 실제로, 시뮬레이션은 소용돌이 입자들의 위치를 계속 추적하고 있으나 그들의 연결성, 다시 말하면, 각 입자가 두 개의 인접 입자들을 연결하고 있다는 것 또한 기억하고 있다. 그리고, 유도 속도장의 계산은 인접 입자와 연결되어 있는 곡선을 따라 비오사바르 법칙을 평가하는 것과 연관된다. 이 기술로 대략 소용돌이 뿔침을 자동적으로 고려하여, 공간 구배를 이용한 그 항을 계산할 필요성을 경감시켜주는 장점이 있다.

만약 시뮬레이션이 N 보르톤을 가지고 있다면, 똑바른 이류 계산으로  $O(N^2)$ 를 작동할 수 있는데 이것은 너무 느리다. 따라서, 대신에, 여러분은 단일 소용돌이로써 다중 거리 소용돌이도 무리의 영향을 추산할 수 있다. 그러한 무리들이 충분히 멀리 떨어져 있는 한, 이러한 추산은 가시적 효과로 충분히 작용한다. 그림 5 에서는 여러분이 계층적 자료 구조 (예를 들면, 나무)를 이용하여 소용돌이 무리들을 나타낼 수 있는 방법을 보여주고 있다. 결절점의 바닥 줄은 실제 보르톤을 나타낸다. 그 위의 층에서 각 결절점은 보르톤의 무리를 나타내며, 그 위의 층은 무리의 무리를 나타내며, 계속 그렇게 된다. 질의 위치에서 속도를 계산하기 위하여, 그림 5b에서처럼, 위에서 아래로 수형도를 가로지른다: 각 결절점을 찾아 질의 위치(무거운 타원형)가 결절점이 나타내고 있는 구역 내에 있는가를 물어 본다. 만약 그렇지 않다면, 단일 보르톤이 아니더라도, 해당 무리 (어두운 구역)의 영향을 적용하라. 만약 질의 위치가 무리 구역내에 자리하고 있다면, 그 가지 (화살표를 따라)를 내리기를 반복하라.

보르톤 무리

실제 보르톤

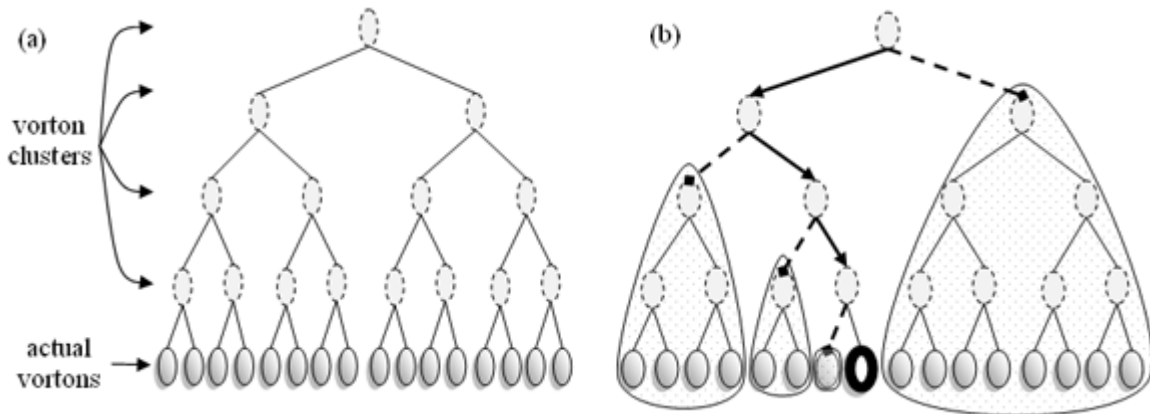


그림 5: 보르톤 무리 수형도. 각 원시 결절점은 단일 보르톤으로써 그 하부를 나타내고 있다. (b) 표시한 보르톤에 영향을 미치고 있는 무리를 찾기 위한 순회.

원칙적으로, 보르톤 시뮬레이션은 계산 자원을 가장 흥미로운 운동을 가진 흐름의 구역 (소용돌이도를 가진 구역)에 초점을 맞출 수 있다. 이것은 수치학적으로 소용돌이도를 확산하지 않기 때문에, 기술은 여러분이 오랜 기간 동안 미세 규모의 소용돌이 치는 운동을 유지하기를 원하는 곳인, 화재의 연기와 같은 점성이 낮은 흐름에 작용한다. 하지만, 장거리 이류 상호작용은 느리거나 복잡할 수 있으며, 아무런 사소하거나 빠른 해결책은 없다.

여러분은 그리드 기반 및 입자 기반 시뮬레이션을 최대한 이용하기 위하여 두 요소를 혼합할 수 있다.

### 하이브리드 계획

오일러 접근법은 이류항 (아래에 설명한 것처럼)으로 인하여 불안정성을 겪을 수 있다. 불안정성을 피하기 위한 한 가지 방법은 질문 하는 것인데, 매 시간 단계에서 각 그리드 점에 대하여 흐름이 어디로부터 도착하였는가? 이 “역추적”은 반라그랑주 기술이라 불리는데, 이것이 입자 기반 방법에 대하여 이류 유사성을 다루고 있기 때문이다.

바꾸어 말하면, 이산 소용돌이 방법은 속도를 계산하기 위하여 (위에 설명되어 있는) 비싸거나 복잡한 알고리즘을 필요로 한다. 비오사바르 법칙을 이용하는 대신, 여러분은 입자로부터 그리드로 소용돌이도를 이전하여 그 속도장을 회복하기 위하여 벡터 푸아송 방정식을 풀 수 있다. (푸아송 해결사는 쉽게 이용 가능하다.) 이러한 소위 쉘내 입자 (PIC)나 쉘내 소용돌이 (VIC) 기술 또한 (아래에서 논의하는) 공간 구배의 계산을 단순화 한다. 그 동안, 시뮬레이션의 기초는 보르톤에 머물러 있는데, 이것은 확산하지 않아서, VIC 방법은 여러분에게 그리드 기반 방법의 상대적 단순성과 입자 방법의 확산 부족을 가져다 준다.

### 수치 기법

유체 시뮬레이션에서 사용한 수치 기법에는 결절점 사이의 값의 삽입, 공간 구배 추산, 시간을 통한 흐름을 전개하기 위한 다른 방정식의 해결과 경계선 조건 만족시키기 등이 있다.

### 내삽법

여러분은 시뮬레이션이 명백하게 값을 나타내고 있는 결절점 이외의 지역에서 값을 결정할 필요가 있다. 여러분은 내삽원 - 혹은 결절점을 통과하는 기초 기능으로 부르는데 - 을 이용하여 그렇게 한다.

여러분은 부분에서 전체까지 여러 가지 내삽 기능 사이에서 고를 수 있다. 구분적으로 선분에서는 인접 그리드점 사이에서 1 차원적인 내삽을 제공하고 있다 (그림 6a). 단순히 바로 인접한 점만을 사용하는 대신, 여러분은 구분적으로 3 차 유행곡선과 같은 보다 넓은 그리드 점의 이웃과 보다 높은 순위의 내삽원을 사용할 수 있다 (그림 6b). 그의 논리적 결론에 대한 사고방식을 고려하여, 여러분은 전 영역에 걸쳐 있는 유행자를 만들기 위하여 아주 고순위 기능을 사용할 수 있다 (그림 6c).

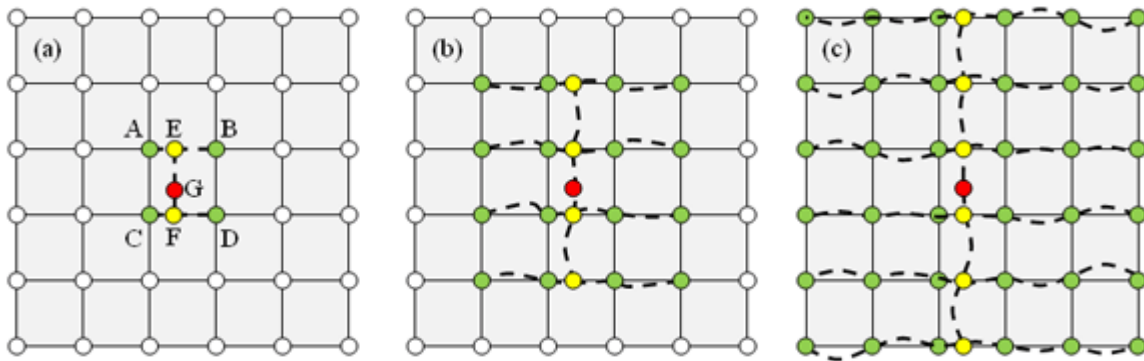


그림 6: 그리드 상의 내삽. 직선의. (b) 입방의. (c) 전체의.

입자 시뮬레이션은 가장 가까운 (그림 3b 의 위치가 나타내는 것과 같은) 것을 추적하여 불규칙한 자료로 특수화된 내삽 기술을 사용할 수 있다. Oc-수형도와 kd-수형도와 같은 공간 구배는 또한 동일한 자료 이웃에 자리하고 있는 동일한 물리적 이웃에 자리잡고 있는 입자들을 조직하고 있다. 여러분은 주어진 지역의 가장 가까운 이웃에 대한 결과 수형도를 찾을 수 있다.

양자택일로, 여러분은 유체 특성을 나타내기 위하여 입자를 사용, 입자로부터 격자까지 값들을 이전하고 입자 사이에 있는 지역에서 그러한 특성을 삽입하기 위하여 그리드 기반 기술을 이용하는 등 하이브리드 PIC 접근법을 이용할 수 있다.

### 공간 구배

유체 운동을 지배하고 있는 방정식에는 공간 구배와 관련된 항들을 포함하고 있어서, 여러분은 이들을 계산할 필요가 있다. 공간 구배를 추산하기 위한 기술은 내삽 기술과 직접적인 연관이 있다.

유한 차분 (FD) 방법은 그들의 분리로 나누어지는 인접 지역으로부터 양의 차이를 이용한다 (그림 7 에 나와 있는 것처럼). 그것들은 단지 지역 정보만을 사용하기 때문에, FD 방법은 경계선을 변화시키면서(예, 유체에서 물체 이동) 임의로 쉽게 조작하지만, 다른 방법에 비하면 정확성이 낮다. FD 는 간단하고, 유연하며 효율적이어서, 정확성이 매개변수가 아닌 비디오 게임에 좋은 선택사항이다.



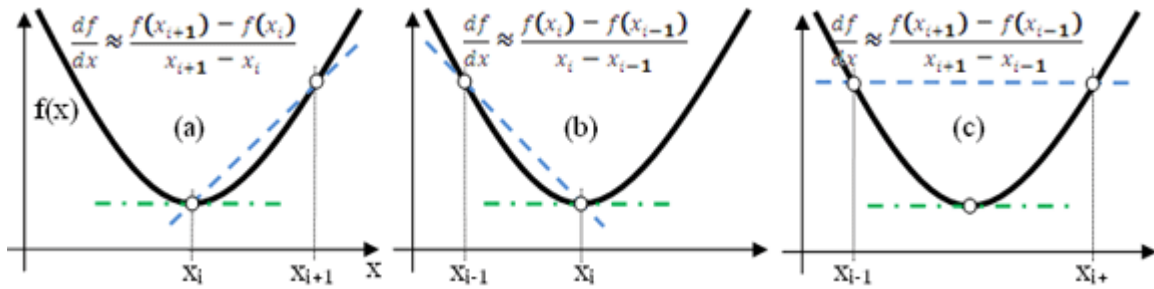


그림 7: 유한 차분. 앞쪽, (b) 뒤쪽, (c) 중앙.

스펙트럼법에서는 영역에 있는 다중 값에 걸쳐 있는 내삽 기능을 이용하므로, 여러분은 그러한 기능들의 도함수를 분석학적으로 계산할 수 있다. 스펙트럼법은 보다 높은 정밀도를 주고 있으나, 그들이 전체적 (혹은 약간 국부적인) 정보를 이용하고 있기 때문에, 영역 모양과 경계선 조건은 흐름장을 나타내기 위하여 어떠한 기능들을 잘 운영해야 하는 가를 결정하는 구속을 부과하고 있다.

스펙트럼법은 두 가지 방법, 병치와 갈러킨에 이르게 된다. 병치법은 위에 묘사한 것처럼 공간 영역에서 배열된 값을 이용하고 있다. 갈러킨 법은 음향 신호의 주파수 범위와 비슷한 추상적인 영역을 이용하고 있다. 하이브리드 병치-갈러킨법 또한 존재한다.

공간 구배를 추산하기 위한 이러한 기술은 여러분을 지배 방정식에서 각 항을 계산하기 위한 능력을 갖추게 한다.

연속 방정식에서 도함수를 추산으로 치환하여, 여러분은 연속 방정식을 이산화 형태로 전환시킬 수 있다. FDs 를 사용할 때, 이것은 직선 대수 방정식의 시스템으로 연속적인 PDE 의 변화를

의미한다. 예를 들면, 기울기  $\frac{\partial}{\partial x}$  를 중심 차분으로 치환하면, 연속 방정식은

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

공간적으로 이산 방정식이 된다.

$$\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t} = -u(x_i,t) \frac{u(x_{i+1},t) - u(x_{i-1},t)}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

추산한 공간 구배 값을 원래의 유체 역학 방정식으로 접속한 후에, 우리는 또한 적절하게 매 새로운 단계에 대한 시뮬레이션을 업데이트하기 위한 알고리즘을 만들기 위하여 때에 맞추어 그러한 방정식들을 이산해야 한다.

### 시간 전개

시뮬레이션은 이산 단계에서 적절한 때에 앞으로 전개된다. 시간 전개 계획에는 다양한 정확성과 안정성 특징을 가지고 있는 명료하며 함축적인 기술군들이 포함되어 있다. 이전 시간에 관한 정보가 주어졌다면, 가장 직접적인 방법은 적절한 때에 명료하고 직접적으로 값들을 전방 통합을

다루고 있다. 동일한 계획은 입자와 고체 운동을 시뮬레이션 하기 위하여 사용된 상미분방정식에 적용할 수 있다.

명료한 방법은 과거의 정보를 이용하여 미래를 풀 수 있다. 변형에는 오일러 (그림 8a), 룽게-쿠타와 중심점 (그림 8b) 등이 있다. 가장 단순한 방법-앞쪽의 오일러 방법-은 다음과 같이 정의한다:

$$f(t + \Delta t) \approx f(t) + \Delta t f'(t)$$

여기에서,  $f$  는 전개되는 양,  $\Delta t$  는 시간 단계,  $f'$  는 1 차 시간 도함수,  $t$  는 시간이다. 앞의 오일러 방법은 앞의 차분 계획의 사용과 비슷하다 (그림 7a 에서 처럼). 시간 (앞의 차분을 이용한)과 공간 (중심 차분을 이용한)에서 이산화한 위의 예시 PDE 는 다음과 같이 된다:

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{x_{i+1} - x_{i-1}} \Delta t$$

정확한 경로	위치
시뮬레이션 한 경로	속도

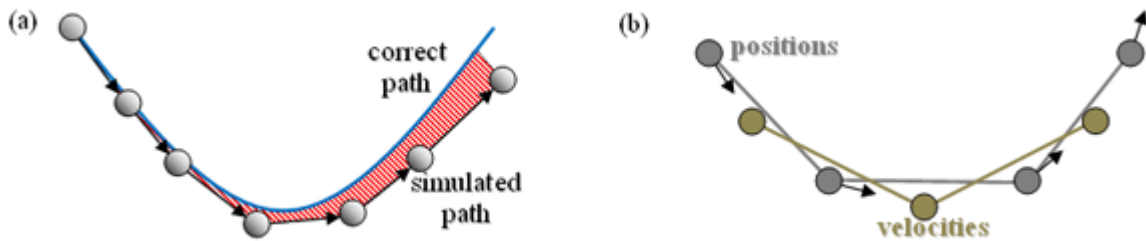


그림 8: 명료한 시간 단계. 명료한 오일러. (b) 중심점 “뛰어넘기”.

룽게-쿠타 방법은 오류가 보다 작은 단계의 혼합 오류보다 더 작은 보다 큰 단계를 만들기 위하여 다양한 보다 작은 단계들을 결합시킨다. 중심점 방법은 중심 차분 계획의 사용과 비슷하다 (그림 7c 에서 처럼). 이것은 비슷한 계산 비용을 가진 오일러보다 높은 순위의 정밀도를 가지고 있다. 위치와 속도는 서로서로 “뛰어 넘으므로”, 여러분은 두 개의 시차제 시뮬레이션을 효과적으로 추적할 수 있다.

이것을 각 결절점  $i$  에 적용하면 1 차 대수 방정식의 시스템을 만들 수 있다. 여러분은 벡터 행렬의 형태에서 그러한 방정식의 시스템을 표현할 수 있다. 그 결과의 행렬은 매우 적다 (즉, 0 인 요소들이 많이 있다). 특수화된 1 차 대수 알고리즘은 희박성을 찾기 위하여 존재한다: 여러분은 그러한 방정식의 시스템을 풀기 위하여 이들을 이용할 수 있다.

명료한 방법은 간단하지만 그들은 안정화 시키기에 까다롭거나 느릴 수 있다. 쿠랑-프리드리히-루이 (CFL) 조건은 몇몇 PDEs 에서 공간 해상도와 시간 단계 사이의 관계를 정립시켜 준다.

비공식적으로, 이것은 시간 단계가 약간의 유체가 한 그리드 셀에서 다른 곳으로 이동하는 시간보다 더 적어야 함을 의미한다 (그림 9 에 나와 있는 것처럼). 그것은 유체 운동이 빨라 질수록, 시간 단계가 더 작아짐을 의미하는데, 이는 시간 단계가 크지 않는 것을 의미하며 보다 계산적인 노력과 보다 느린 시뮬레이션을 의미한다.

만약 수치 해가 불안정하다면, 오류는 무한정으로 빠르게 커진다. 이것을 경감시킬 수 있는 한 가지 방법은 오실레이션을 악화시키는 것이다 (예, 점성을 이용). 이것은 “폭발”로부터 해를 방지하지만 또한 높은 점성 (예를 들면, 물 대신 시럽)을 가진 유체 운동을 제한 하는 것이다.

여러분은 그 시뮬레이션을 안정화시키기 위하여 도입한 과도한 점성의 결과로 소실되는 미세 입자를 주사함으로써 과도한 약화의 결과를 경감시킬 수 있다. 그러한 기술에는 대형 소용돌이 시뮬레이션 (LES), 레이놀즈-평균 나비에 스톡스 (RANS), 분리된 소용돌이와 소용돌이도 제한 등을 포함하고 있다.

반라그랑주 기법 (위에서 설명)은 유체를 이류시키기 위하여 입자 기반 계획을 이용하여 불안정성을 피하고 있다 (그림 9c 에서 설명). 유체 역학 방정식의 다른 항들은 오일러 관점을 이용하여 계산하였다. 유체 꾸러미가 시간 단계당 그리드 셀보다 더욱 멀리 이동할 때, 역추적은 불안정성을 피할 수 있다.

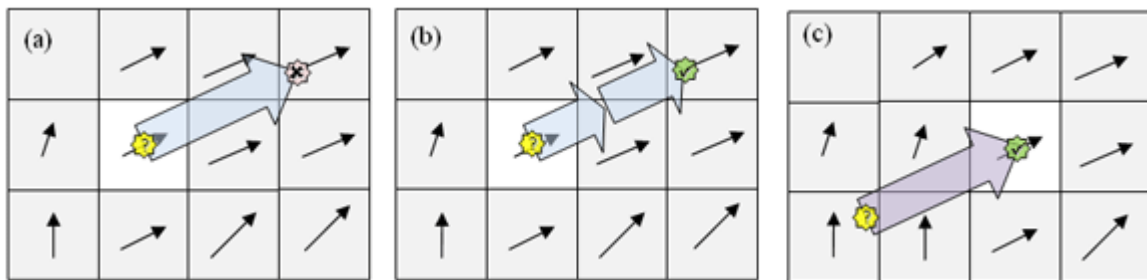


그림 9: CFL 조건. CFL 위반, (b) 보다 작은 시간 단계로 만족되는 CFL, (c) 역추적을 이용하여 피하는 불안정성.

함축적인 방법은 미래 해결책은 미래와 과거 해결책에 의존하도록 운동의 방정식을 기술하는 것으로부터 유래한다. 예를 들면, 후방 오일러 방법은 다음과 같이 정의하고 있다

이것은 불합리하게 보일 수 있다: 여러분은 그 문제를 해결하기 위하여 분명하게 미래를 알 필요가 있다. 하지만, 실제로, 야코비, 가우스-자이델, 연차가속완화법 (SOR)이나 공액 구배 (CG)와 같은 수치적 1 차 대수 해결사를 이용하여 함축적으로 해법을 찾는 것은 가능하다. 유한 차분 이산화와 그에 상응하는 1 차 방정식 시스템 (위에 설명)을 사용할 경우, 함축적인 계획을 사용하는 것은 1 차 대수 시스템의 행렬에서 값을 변경시키는 것을 필요로 할 뿐이며, 해결사 코드는 동일하게 된다.

시뮬레이션이 명백하게 CFL 조건을 어겼더라도, 명료한 방법이 아니라면, 함축적인 방법은 종종 안정적이다. 하지만, 이 안정성은 비용이 따르게 된다: 비록 이것으로 점성이 높아지는 것처럼 약간 움직이며, 효과적으로 시뮬레이션은 악화된다. 이 현상을 수치 점성으로 부른다. 최종

결과는 아주 높은 점성을 가진 명료한 해결사로부터 그들을 보면서 끝맺음을 하며, 함축적인 해결사는 더욱 계산적인 노력을 할 수 있다.

### 솔레노이드화 실행

보통 시각적인 효과를 위하여, 유체 시뮬레이션은 “압축할 수 없는” 추산을 이용하는데, 질량은 수렴하거나 발산할 수 없음을 의미한다. 이러한 경우에, 압력에 대한 분리된 방정식은 없다: 비압축성을 통하여 점성에 직접적으로 연결된다. 이류 단계는 비압축성을 어길 수 있으므로, 복구시킬 필요성이 있다. 한가지 해법은 그의 솔레노이드 구성품을 얻기 위한 발산장을 투영하기 위하여 “스칼라 푸아송 해결사”를 사용하는 것이다. 이것은 “안정한 유체”에서 스태를 사용하는 것이다. 반대로, 믹 웨스트는 비압축성 제한을 따르기 위하여 이류 단계를 만들어 이 분리 단계를 피하였다.

비슷한 문제가 소용돌이 기반 시뮬레이션에서 발생한다: 수학적으로 소용돌이도 (혹은 어떠한 회전)가 확산할 수 없더라도 소용돌이도장은 확산을 축적할 수 있다. 이 확산을 속도장에 영향을 미치지 않지만 소용돌이 확산을 변경시킬 수 있다. 시뮬레이션은 확산 소용돌이도가 부적당한 문제를 야기하지 않도록 소용돌이 확산을 공식화하여야 한다. 이것은 약간의 직접적 대수 조작을 필요로 하지만, 간결을 위하여, 이 기사에서는 상세한 설명을 빠뜨렸다.

### 물체와 상호작용: 경계선 조건

PDE's 를 푸는 것은 또한 경계선 조건의 만족을 수반하는데, 흐름은 경계선에서 반드시 어떠한 규칙을 따라야 함을 의미한다. 이전의 기사에서는 기준의 사례를 설명하며, 그림 10 목록에서는 다양한 경계선 조건을 나타내고 있다.

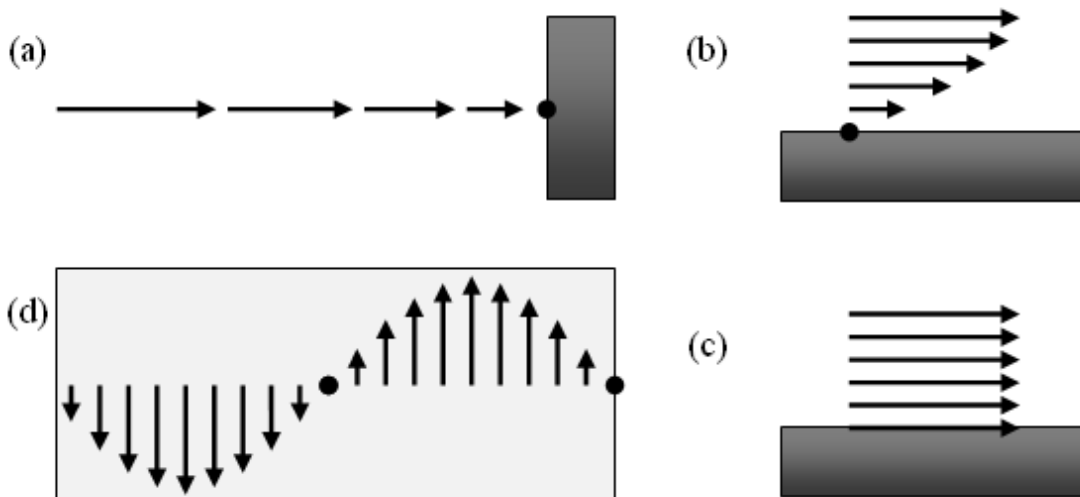


그림 10: 경계선 조건. 통과 못함, (b) 미끄러짐 없음, (c) 자유로운 미끄러짐, (d) 주기적.

시뮬레이션은 명료하게 혹은 암시적으로 경계선 조건을 만족시킬 수 있다. 시뮬레이션은 이산화에서 유래한 1 차 대수 방정식의 시스템으로 경계선 조건을 통합시키거나 각 단계의 후 공정을 적용하여 명료하게 경계선 조건을 만족시킬 수 있다. 이류 단계는 경계선 조건을 어기는 예비 해결책으로 끝날 수 있다 (예를 들면, 고체를 통하여 혹은 가로질러 흐름을 가질 수 있는,

하지만 이것은 물리적으로 불가능하다). 다양한 기술들이 그 문제를 해결하기 위하여 존재하고 있다. 가장 간단한 것은 경계선에서 유체 값들을 덮어 쓰는 것이며, 변하고 있는 하위 전개 단계를 전달하도록 한다. 그러한 처리는 정확하지는 않지만 시각적 효과에는 충분할 수 있다. 하지만, 그러한 갑작스러운 변화로 불안정성을 시뮬레이션에 들여올 수 있다.

양자택일로, 시뮬레이션은 항상 경계선 조건을 만족시키는 방법으로 해결책을 나타낼 수 있다. 이것은 보통 특별한 경우에, 예를 들면, 내삽 기능이 경계선에서 원하는 값을 가지는 스펙트럼법을 이용하는 그러한 경우에만 수행할 수 있다. 그러한 계획은 아마도 비디오 게임에서 사용하기에는 너무나 제한적이라, 유체를 통하여 움직이고 있는 임의의 (변화 가능한) 형태의 물체를 가지고 있는 것 같다.

원칙적으로, 경계선 조건을 만족시키는 것은 양방향 상호작용이다. 유체에서의 물체는 흐름에 영향을 미치며 흐름 또한 물체에 영향을 미친다. 실제로, 이 양방향 결합은 별개의 단계에서 발생한다. 유체 시뮬레이션은 유체 입자에 의하여 적용되는 충격을 계산하기 위하여 물체 표면에서 압력 기울기를 계산하거나 직선과 각 모멘텀의 보존을 이용하여 유체에 잠겨있는 고체에 적용되는 힘을 제공하고 있다. 그 다음, 별개의 고체 시뮬레이터는 그러한 힘이나 충격을 물체에 적용하여 보통 진행할 수 있다.

## 평행화

국부 물질 모델을 사용하는 것은 유체 시뮬레이션의 평행화를 촉진시키는 것이며, 전체 해결책 (즉, 동시에 전체 시뮬레이션 영역에 영향을 주는 해결책)을 필요로 하는 시뮬레이션의 특징은 평행화를 지연시킬 것이다. 스레드를 가로지르는 메모리를 공유하는 것은 평행화를 단순화 시켜 준다. 분산 메모리 시스템 (IBM CELL 구성과 같은)은 보다 정교함을 요구한다.

여러분이 다른 입자로부터 독립적으로 각 입자의 운동을 업데이트 할 수 있으므로, 입자 기반 방법은 쉽게 평행화된다. 원칙적으로, 각 입자는 고유의 스레드를 움직인다. 보르톤 방법에서, 이것은 여러분이 쉽게 배열할 수 있는 입자들을 업데이트 하기 전에, 상호작용 수형도가 원래의 입자로부터 필요한 모든 정보를 포함하고 있다고 가정한다.

메쉬 기반 방법은 입자 기반 방법이 시행하는 것과 동일한 이유로 쉽게 평행화 된다: 이 시뮬레이션 알고리즘은 각 셀을 독립적으로 업데이트 할 수 있다. 실제로, 이것은 효과적으로 데이터를 2 배로 완화시켜주며 입력보다 다른 벡터에서 출력을 저장하는 수치 1 차 대수 해결사의 이용을 수반한다. 이것은 더 많은 메모리를 필요로 하지만, 평행화를 더 쉽게 하여 준다. 이것은 해결 기간 동안 부분적으로 업데이트한 정보를 이용하는 가우스-사이델 방법과 반대의 편견을 약간 강요하며, 그것이 일련의 과정에서 수렴 속도를 향상시키더라도, 이것은 평행 과정에서 경쟁을 만들어 낸다.

## 요약

유체 운동을 시뮬레이션 하는 것은 연속 방정식을 보다 단순한 이산 방정식으로의 전환과 이산화 방정식을 푸는 수치 기법의 이용을 수반한다. 공간 이산화에는 그리드 기반 및 메쉬 프리 방법을 포함하고 있다. 시뮬레이션은 경계선 조건을 만족시키는 반면에, 때에 맞추어 공간 구배를

추산하고 시뮬레이션을 앞으로 전개시켜 결절점 사이의 값을 내삽하는 기술을 사용하고 있다. 유체 시뮬레이션은 또한 유체에 들어 있는 물체에 작용하는 힘을 제공하기 위한 수단을 제공하는데, 이것은 별개의 고체 시뮬레이터를 적용시킬 수 있다.

이 연속물의 다음 기사에서는 비디오 게임에서 사용하기에 적합한 메쉬 프리 소용돌이 입자 유체 시뮬레이션을 제공할 것이다.

## 더 읽을거리

Stam, J. (1999): "Stable Fluids", SIGGRAPH 99 Conference Proceedings, Annual Conference Series, August.

Cottet & Koumoutsakos (2000): Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge University Press.

Li & Liu (2004): Meshfree Particle Methods. Springer-Verlag.

Bridson (2008): Fluid Simulation for Computer Graphics. A.K. Peters.